POLİNOM ŞERİTLERİ: Polinom fonksiyonlarının ifadesini bulmak için polinomun görüntü kümesini kullanmak

Anıl YARIŞ Rehber Öğretmen: Gamze UÇAKCIOĞLU ÇAKIR

TED ANKARA KOLEJİ VAKFI OKULLARI Taşpınar Köyü Yumrubel Mevkii No:310 İncek, Gölbaşı/Ankara, 06830

TED Ankara Koleji Vakfı Özel Lisesi

AMAÇ

Bu projede görüntü kümesinden ardışık elemanlar verilen bir polinom fonksiyonunun ifadesini sonlu fark kullanarak bulmak amaçlanmıştır.

GİRİŞ

Bu projede hedef, x'in P(x)'e hangi kuralla bağlandığını x'in ardışık arttığı veya azaldığı P(x) değerlerine bakarak ortaya çıkarmaktır. Görüntü kümesindeki tüm P(x)'ler tanım kümesinde eşleştikleri x'lere aynı kuralla bağlı olduğundan bu kümeden seçilmiş, tanım kümesindeki hangi değerle eşleştiği bilinen P(x) değerlerini belirli bir işleme sokarak yukarıda belirtilen hedefe ulaşmanın mümkün olduğu gözükmektedir. Bunun için sonlu fark metodu seçilmiştir.

Sonlu fark, f(x+a) - f(x+b) şeklinde yazılan ifadelerdir. a ve b'nin aldığı değerlere göre bu ifade ileri yönlü (a>0, b = 0), geri yönlü (a = 0, b<0), veya merkezi (a>b, a = -b) fark olarak adlandırılır. İki ardışık sonlu fark arasındaki fark ikinci dereceden, iki ikinci derecedenin arasındaki üçüncü dereceden, kısacası iki (n-1) dereceden arasındaki fark n'inci dereceden sonlu fark olarak ifade edilir.

Bu projede derecesi n olan bir polinomu görüntü kümesinden belirlemek için n'inci dereceden ileri yönlü sonlu fark kullanılmış, bu ifadenin polinomun bazı karakterlerine göre değişimleri incelenip polinomun ifadesini bulmak için özgün bir yöntem geliştirilmiştir.

YÖNTEM

Aşama 1: Herhangi bir polinom seçilir. Bir x_0 değeri seçilerek $P(x_0)$ yazılır. Bu değerin sağına doğru sırasıyla $P(x_0 + h)$, $P(x_0 + 2h)$, $P(x_0 + 3h)$, ... değerleri yazılır. Burada "h", tanım kümesinin değiştirilme aralığıdır. İsteğe bağlı olarak, $P(x_0)$ değerinin soluna doğru sırasıyla $P(x_0 - h)$, $P(x_0 - 2h)$, $P(x_0 - 3h)$, ... yazılabilir.

625 256 81 16 1 0 1 16 81 256 625

(Aşama 1'in $x_0 = 0$ ve h = 1 için x^4 polinomuna uygulanması)

Aşama 2: Ardışık değerler arasındaki farklar aradaki boşluklara denk gelecek şekilde yazılarak üst satır oluşturulur.

-369 -175 -65 -15 -1 1 15 65 175 369

625 256 81 16 1 0 1 16 81 256 625

(Aşama 2'in $x_0 = 0$ ve h = 1 için x^4 polinomuna uygulanması)

Aşama 3: En üst satırda sıfırdan farklı sabit bir değer tekrar edene kadar Aşama 2 tekrarlanır.

24 24 24 24 24 24 24

-84 -60 -36 -12 12 36 60 84

194 110 50 14 2 14 50 110 194

-369 -175 -65 -15 -1 1 15 65 175 369

625 256 81 16 1 0 1 16 81 256 625

(Aşama 3'ten sonra oluşan $P(x) = x^4$ şeridinden bir kesit)

Yukarıda verilen kesit sağa ve sola doğru sonsuza dek devam ettirilebilir, fakat görüldüğü üzere en üst satırdaki 24 değeri hep sabit kalır. Bu sabit değerin polinomun hangi özelliklerine bağlı olduğu kontrollü deney yöntemiyle anlaşılabilir. Parametreler x_0 (başlanılan değer), h (arttırılma aralığı), n (polinomun derecesi) ve a 0'dan n'ye kadar doğal sayı olmak üzere tüm k_a'lar (a'ıncı dereceden teriminlerin katsayıları) olarak belirlenmiştir.

Parametreler test edildikten sonra sabit değerin h'nin n'inci kuvvetine, k_n'ye ve n'nin faktöriyeline bağlı olduğu tespit edilmiştir. Yani polinomun n'inci dereceden sonlu farkını gösteren $\Delta P^n(x)$ değerinin $h^n k_n n!$'e eşit olduğu bulunmuştur.

KANIT

Kanıtlanması gereken, n'inci dereceden bir polinomun n'inci dereceden sonlu farkının önceki sayfada ulaşılan ifadeye eşit olduğudur. Polinomlar genel olarak $k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} +...+ k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$ şeklinde yazılabilir. Birinci dereceden sonlu fark $\Delta P(x) = P(x+h) - P(x)$ şeklinde, bundan sonraki sonlu farklar da $\Delta P^a(x) = \Delta P^{a-1}(x+h) - \Delta P^{a-1}(x)$ şeklinde yazılabilir. Öncelikle bu ifadeleri kullanarak sonlu farklardan ilk üçü yazılır:

$\Delta P(x) = P(x+h) - P(x)$

$= [k_n(x+h)^n + k_{n-1}(x+h)^{n-1} +...+ k_3(x+h)^3 + k_2(x+h)^2 + k_1(x+h) + k_0] - [k_nx^n + k_{n-1}x^{n-1} +...+ k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0]$

$= k_n[(x+h)^n - x^n] + k_{n-1}[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] +...+ k_3[(x+h)^3 - x^3] + k_2[(x+h)^2 - x^2] + k_1[(x+h) - x]$

Görüldüğü üzere k_0'lar birbirini götürmüş ve sabit terim k_1h olmuştur. Doğal olarak bundan sonraki farkta da k_1h'ler birbirini götürecektir. Bir sonraki sonlu fark yazılmadan önce köşeli parantezlerin içleri açılır:

$\Delta P(x) = k_n[nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 +...+ \binom{n}{n-2}x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n] + k_{n-1}[(n-1)x^{n-2}h + \binom{n-1}{2}x^{n-3}h^2 +...+ \binom{n-1}{n-2}x^2h^{n-3} + (n-1)xh^{n-2} + h^{n-1}] +...$

$+ k_3[3x^2h+3xh^2+h^3] + k_2[2xh+h^2] + k_1[h]$

İkinci dereceden fark yazılmadan önce köşeli parantezlerin içindeki x'e bağlı terimler sonraki farkları yazarken kolaylık sağlaması açısından paranteze alınır:

$\Delta P(x) = k_n[nh(x^{n-1}) + \binom{n}{2}h^2(x^{n-2}) +...+ \binom{n}{n-2}h^{n-2}(x^2) + nh^{n-1}(x) + h^n] + k_{n-1}[(n-1)h(x^{n-2}) + \binom{n-1}{2}h^2(x^{n-3}) +...+ \binom{n-1}{n-2}h^{n-3}(x^2) + (n-1)h^{n-2}(x)$

$+ h^{n-1}] +...+ k_3[3h(x^2)+3h^2(x)+h^3] + k_2[2h(x)+h^2] + k_1[h]$

Bu işlem bir sonraki farkta (x+h)'lerin doğrudan parantezin içine yazılması için yapılmıştır. Şimdi ikinci dereceden fark yazılır:

$\Delta P^2(x) = \Delta P(x+h) - \Delta P(x)$

$= k_n[nh([x+h]^{n-1} - x^{n-1}) + \binom{n}{2}h^2([x+h]^{n-2} - x^{n-2}) +..+ \binom{n}{n-2}h^{n-2}([x+h]^2 - x^2) + nh^{n-1}([x+h] - x)] + k_{n-1}[(n-1)h([x+h]^{n-2} - x^{n-2}) +$

$\binom{n-1}{2}h^2([x+h]^{n-3} - x^{n-3}) +...+ \binom{n-1}{n-2}h^{n-3}([x+h]^2 - x^2) + (n-1)h^{n-2}([x+h] - x)] +...+ k_3[3h([x+h]^2 - x^2) + 3h^2([x+h] - x)] + k_2[2h([x+h] - x)]$

Görüldüğü üzere birinci dereceden sonlu farktan ayrı olarak x'e bağlı terimlerin farkının yazıldığı yerlerin derecesi bir düşmektedir, ayrıca n'in kombinasyonları ve h'nin kuvvetleri her birinin başına katsayı olarak gelmektedir. Ek olarak önceden belirtildiği üzere k_1h'ler birbirini götürmüştür. x'li terimlerin farkları açılacak olursa:

$\Delta P^2(x) = k_n[nh[(n-1)x^{n-2}h + \binom{n-1}{2}x^{n-3}h^2 +...+ \binom{n-1}{n-2}x^2h^{n-3} + (n-1)xh^{n-2} + h^{n-1}] + \binom{n}{2}h^2[(n-2)x^{n-3}h + \binom{n-2}{2}x^{n-4}h^2 +...+ \binom{n-2}{n-3}x^2h^{n-4} + (n-2)xh^{n-3} + h^{n-2}] +...+ \binom{n}{n-3}h^{n-3}[3x^2h + 3xh^2 + h^3] + \binom{n}{n-2}h^{n-2}[2xh + h^2] + nh^{n-1}[h]] + k_{n-1}[(n-1)h[(n-2)x^{n-3}h + \binom{n-2}{2}x^{n-4}h^2 +...$

$+ \binom{n-2}{n-3}x^2h^{n-4} + (n-2)xh^{n-3} + h^{n-2}] + \binom{n-1}{2}h^2[(n-3)x^{n-4}h + \binom{n-3}{2}x^{n-5}h^2 +...+ \binom{n-3}{n-4}x^2h^{n-5} + (n-3)xh^{n-4} + h^{n-3}] +...+ \binom{n-1}{n-3}h^{n-4}[3x^2h + 3xh^2 + h^3]$

$+ \binom{n-1}{n-2}h^{n-3}[2xh + h^2] + (n-1)h^{n-2}[h]] +...+ k_3[6xh^2 + 6h^3] + k_2[2h^2]$

Gözlem doğru çıktı; $\Delta P(x)$'nin ifadesindeki tüm x'lerin derecesi birer düşmüş, ve n'nin kombinasyonları ve h'nin kuvvetleri katsayı olarak gelmiştir. En önemlisi de k_1[h]'ler birbirini götürmüş ve yeni sabit terim $k_2[2h^2]$ olmuştur. Bundan sonra sonuca giden yol şöyledir:

1) a'ıncı dereceden sonlu fark alındığında başında k_a katsayısı olan ifadeden sonraki ifadeler, önceki sonlu farklarda yok olduğundan yer almıyor. Bundan ötürü n'inci dereceden sonlu fark alındığında k_n katsayılı terim dışında hiçbir terim kalmaz.
2) Ayrıca gözlemlendiği üzere her sonlu fark alındığında x'li terimlerin derecesi birer düşmektedir. Buna göre, k_n katsayılı ifadenin içinde x'e bağlı ifadelerin en yüksek derecelisinin derecesi $P(x) = \Delta P^0(x)$'in içinde n-0=n olduğundan, a'ıncı dereceden sonlu fark alındığında bu derece n-a olacaktır. n'inci dereceden sonlu fark alındığında ise n-n=0 olacağından ifade x'lerden bağımsız olacaktır.
3) Her sonlu fark alındığında, terimlerin derecesi birer düştüğü için sırayla her terim önce sabit terim olup sonra da kaybolmaktadır. Her sonlu fark alındığında her terimin h'nin kuvvetlerini içeren en sağdaki iç parantezi kaybolmakta, sağdan ikincisi ise sabit terime dönüşmektedir. $\Delta P(x)$'te k_n katsayılı terimin içinde h'nin kuvvetlerini içeren en soldaki iç parantezde n-(1-1) = n terim vardı. Yani n kez sonlu fark alındığında n-(n-1) = 1 terim olacaktır, bu terim de yukarıda gösterdiğimiz üzere x'ten bağımsız olacaktır.
4) Dereceler düştükçe ifadelerin başına n'in kombinasyonlarının ve h'nin kuvvetlerinin katsayı olarak geldikleri önceden görülmüştü. $\Delta P^2(x)$'te k_n katsayılı terimde en soldaki iç parantez nh[(n-1)h... şeklindeydi. $\Delta P^3(x)$'in açılımı yapılmamış olmasına rağmen bunun nh[(n-1)h[(n-2)h... şekline geleceğini görmek zor değildir. Yani a'ıncı dereceden sonlu fark alınırsa nh[(n-1)h[...[(n-a+1)h... şeklinde olan ifade n'inci dereceden sonlu fark alınırsa nh[(n-1)h[...[(n-n+1)h... şekline, yani $h^n n!$'e gelecektir. En iç parantezin de x'e bağlı olmadığı önceden gösterilmişti. Baştaki k_n katsayısı da işleme sokulursa $\Delta P^n(x) = h^n k_n n!$ olmaktadır.

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu projenin sonucunda bir polinom fonksiyonunun görüntü kümesinden elemanlar kullanılarak polinomun ifadesinin bulunmasının sonlu fark yöntemi ile mümkün olduğu görülmüştür. Bunun yapılması için de polinomun derecesinin, baş katsayısının ve tanım kümesinin arttırılma aralığının bilinmesi gerektiği anlaşılmıştır. Polinomun derecesi şeridin basamak sayısından bulunabilirken diğer ikisinin verilmesi gerekmektedir.

Bu projede şeritlerin polinomsal karakteri yeni bir inceleme konusu olabilir. Zira aynı şeritler derecesi tam sayı olmayan (örn. $f(x) = \sqrt{x+\frac{1}{2}}$), üstel, trigonometrik, logaritma, veya faktöriyel içeren (örn. f(x) = x! + 8x + 4), ya da bunların kendi aralarında kesişimi şeklinde olan fonksiyonlara genellenirse bilinmesi gereken derece etmeninin kullanımı faktöriyel işlemi sadece doğal sayılarda geçerli olacağından işlevsiz olacak, hatta derecenin faktöriyeli, derecesi olmayan trigonometrik ve logaritma fonksiyonlarında tamamen kullanılamayacaktır. Ayrıca arttırılma aralığı ve/veya başlanılan x değeri bilinmeden sadece görüntü kümesi verilerek sonuca ulaştıran bir yöntem geliştirmenin imkanı da araştırılabilir. Bu proje görüntü kümesinden genel ifadeye geçiş açısından bir temel olarak kullanılıp söz konusu diğer araştırmalar bu temel üstünde yapılabilir.

Teşekkür

Proje çalışmalarım süresince bize her türlü desteği veren okul müdürümüz Sayın Aydın ÜNAL'a ve kat müdür yardımcımız Sayın Hande KUTLU'ya, danışman hocam ve matematik öğretmenim Gamze UÇAKCIOĞLU ÇAKIR'a, proje hazırlama sürecinde beni yönlendiren Demet İZGÜ'ye ve kanıt sürecinde bana büyük yardımı olan Betül COŞKUN'a teşekkürlerimi sunarım.

Kaynakça

Frey, P., de Buhan, M. (2008). The finite difference method. Semestre Otoño, Seminario Avanzado de Matematicas I, Numerical simulation of complex PDE problems, Universidad de Chile. *(https://www.ljll.math.upmc.fr/~frey/cours/UdC/ma691/ma691_ch6.pdf)*